ACTES DE LA VI TROBADA D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
(BARCELONA, SCHCT, 2002), 437-442

COVARIÀNCIA I INVARIÀNCIA A L' *ESPACES COURBES* DE CESARE BURALI-FORTI I TOMMASO BOGGIO

Josep Manel Parra Serra; Emma Sallent Del Colombo
Departament de Física Fonamental. Universitat de Barcelona

Paraules clau: *covariància, invariància, relativitat, Burali-Forti, Boggio, Marcolongo, Ricci, Levi-Civita*.

Covariance and Invariance in Cesare Burali-Forti and Tommaso Boggio's *Espaces Courbes.*

Summary: *We analyse some features regarding Cesare Burali-Forti and Tommaso Boggio's notions of covariance and invariance, considered in their 1924 book Espaces Courbes. Critique de la Relativité. The authors establish a correspondence between their own mathematical formalism and the absolute calculus of Ricci and Levi-Civita. These developments are mainly used to criticise the theory of relativity from a mathematical perspective.*

Key words: *covariance, invariance, relativity, Burali-Forti, Boggio, Marcolongo, Ricci, Levi-Civita.*

1. Introducció

El 1924 es publica el llibre *Espaces Courbes. Critique de la Relativité* de Cesare Burali-Forti (1861-1931) i Tommaso Boggio (1877-1963) (Burali-Forti Boggio, 1924) que, en línia amb el treball d'altres matemàtics com Giuseppe Peano (1858-1932), pretenia reformular les lleis de la física prescindint de la utilització de les coordenades. El nou formalisme es basava en la sistematització de les notacions del càlcul vectorial i en les dites *homografies vectorials*.

El marc històric en què apareix aquesta contribució és el de la confrontació entre l'escola de Peano, de geometria intrínseca en la línia de Leibniz i Grassmann (vegeu Couturat, 1901) i la de Ricci (1853-1925) i Levi-Civita (1873-1941), de geometria cartesiana basada en les relacions entre components i coordenades.

L'*Espaces Courbes* representa un punt de discontinuïtat en la col·laboració mantenida per Cesare Burli-Forti i Roberto Marcolongo. Conjuntament havien publicat treballs entre 1907 i 1911 participant activament en la discussió sobre les notacions vectorials en revistes com l'»Enseignement mathématique» o «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo» (Burali-Forti, Marcolongo, 1907a, b; 1908a, b; 1911). Havien publicat també llibres de càlcul vectorial i d'homografies vectorials, (Burali-Forti, Marcolongo, 1909*a*, 1909*b*; 1912-1913), amb aplicacions als diferents àmbits de la física incloent l'electrodinàmica. (Marcolongo, 1906; 1912; 1913).[1] El 1921 Marcolongo publica *Relatività* (Marcolongo, 1921), el primer llibre italià sobre la teoria de la relativitat especial i general, utilitzant el formalisme del càlcul amb coordenades de Ricci i Levi-Civita. Marcolongo serà un dels divulgadors de la teoria de la relativitat a Itàlia. (Cattani, 1996). De tota manera, en aquesta obra que suposa una interrupció de l'estreta col·laboració del *«binomio vettoriale»*, Marcolongo afirma: «Anche alla teoria della Relatività sono applicabili, con completo successo, i metodi delle omografie vettoriali di cui, da molti anni, facciamo uso e ci sforziamo di diffondere, il Prof. Burali-Forti ed io... Ma il seguire tal via mi avrebbe costretto a valermi delle parti più astratte e più complesse di teorie che non sono ancora conosciute da tutti»; tornaran de fet a treballar plegats el 1929 (Burali-Forti, Marcolongo 1929).

Contribucions a la formulació intrínseca dels espais corbats són els articles de 1918 a 1922 (Boggio, 1918; 1919; Burali-Forti, 1922*a*, 1922*b*), l'*Espaces Courbes* del qual ens ocuparem aquí, els articles escrits a partir de 1926, com ara Boggio, 1926; 1928*a*, 1928*b*, 1928*c*, 1928*d*; 1929*a*, 1929*b*; i el llibre del 1930 (Burgatti, Boggio, Burali-Forti, 1930).

2. Estructura de l'*Espaces Courbes*

El llibre s'articula en dues parts, i presenta una introducció *volgudament polèmica,* en la qual els autors declaren que la finalitat del llibre és la critica de la teoria de la relativitat. Afirmen que la crítica s'hauria de dur a terme des de quatre punts de vista diferents: el físic experimental, el filosòfic, el de les relacions amb la mecànica clàssica, i el matemàtic. Insisteixen en el fet que en el llibre tractaran essencialment els aspectes matemàtics.

En la primera part es desenvolupa la teoria del vectors i de les homografies vectorials (aplicacions multilineals vectorial-valuades), en dimensió arbitraria en un espai euclidià. Després d'aquests desenvolupaments matemàtics, que ocupen gairebé tota la primera part, es procedeix a establir una correspondència entre el formalisme intrínsec dels autors i el càlcul absolut amb coordenades de Ricci i Levi-Civita. (Levi-Civita, Ricci, 1901). Amb aquesta finalitat, introdueixen les nocions de sistema múltiple covariant i contravariant (els avui anomenats tensors), la seva suma, producte i composició, així com també els objectes corresponents als tensors de Riemann, de Ricci, d'Einstein, i als símbols de Christoffel.

En la segona part els autors analitzen la teoria dels espais corbats i duen a terme, emparant-se en els desenvolupaments matemàtics de la primera part, la crítica de la relativitat.

3. Anàlisi de la covariància

Els autors defineixen els conceptes de covariància, contravariància i invariància d'un objecte al realitzar una *transformació d'un punt a un altre,* i demostren que aquestes definicions són equivalents a les del càlcul absolut amb coordenades. La introducció d'aquestes

1. Per a una discussió sobre els treballs d'electrodinàmica de Marcolongo vegeu Giannetto, 1999*a*, 1999*b*; Pratesi, 1999.

nocions resulta necessària a l'hora d'establir la correspondència amb el formalisme de Ricci i Levi-Civita.

L'anàlisi i la crítica del concepte de covariància constitueix un dels punts claus a l'hora d'atacar la teoria de la relativitat. Era opinió generalitzada que aquesta teoria es basa en el *principi de covariància general*, que estableix que les lleis de la física no han de canviar en una transformació general de coordenades.[2] Segons els autors, aquest principi no té cap fonament experimental, ja que les transformacions generals de coordenades no existeixen en la natura (Burali-Forti, Boggio 1924: 222) i hi ha pocs arguments i molts confosos per admetre aquest principi. Una d'aquestes justificacions és que la covariància conserva la mètrica o, dit altrament, que les distàncies són independents de la representació. (Boggio, 1919, Nota II: 170). Argumenten que han trobat uns tipus nous de covariància que no poden ser definits utilitzant el càlcul absolut amb coordenades i, en particular, un que també conserva la mètrica. Al fer la traducció del tensor de Ricci observen que es tracta d'un objecte que ells anomenen *covariant de primer tipus*, insisteixen en què *no és covariant de segon tipus,* i afegeixen que podrien trobar un objecte covariant d'aquest últim tipus que conduiria a una altra teoria de la relativitat, inconsistent amb la primera.

Per comprendre l'abast d'aquests arguments cal analitzar en detall els desenvolupaments matemàtics. Burali-Forti i Boggio parteixen de l'equivalència entre les homografies vectorials d'ordre n i els sistemes múltiples d'ordre $n+1$. Un cop trobada la correspondència pels sistemes múltiples, diran que un sistema és covariant, contravariant o invariant si es comporta d'una manera especificada *al passar d'un punt a un altre*.

Les expressions matemàtiques que defineixen la covariància i la contravariància de diferent tipus es corresponen amb les fórmules de transformació dels tensors mixtos. Així, per el cas particular d'un tensor d'ordre tres, la covariància de primer tipus correspon a un tensor 3-covariant; la covariància de segon tipus a un tensor 2-covariant 1-contravariant, etc. El fet que «la covariància conserva la mètrica» es formula de la manera següent: donada la regla de transformació dels vectors al passar d'un punt a un altre, el quadrat de l'element de longitud ds^2, que expressa la distància, roman invariant si l'homografia α (la mètrica) és covariant de primer o de segon tipus. A partir d'aquesta idea, si l'homografia que tradueix el tensor de Ricci (l'homografia ψ de primer ordre) és covariant de primer tipus, hauria de serho també de segon, ja que entenem que els dos tipus coincideixen en el cas d'una homografia de primer ordre. De fet, l'anàlisi detallada de la demostració segons la qual l'homografia de Ricci és covariant de primer tipus (Burali-Forti, Boggio 1924: 74) ens porta, no sense sorpresa, a concloure que és també covariant de tipus dos.

Analitzant les contribucions fetes pels autors en els treballs posteriors a l'*Espaces Courbes,* no hem trobat cap referència ni comentari a aquesta discussió. Les contribucions de la bibliografia secundaria (Cattani, 1996; Freguglia, 1986; Maiocchi, 1985, 1986) tampoc no ajuden a aclarir aquest aspecte, ja que no entren gairebé mai en l'anàlisi de les matemàtiques involucrades.

A partir dels covariants i contravariants demostren que es poden construir els invariants que són els objectes que descriuen les propietats geomètriques i físiques dels sistemes (Burali-Forti, Boggio1924: nota I)

Dues diferències substancials amb la covariància de Ricci i Levi-Civita es posen de

2. Per a una anàlisi de la evolució històrica del concepte de covariància general, vegeu Norton, 1993.

manifest en la natura de les homografies σ, que transformen vectors en un punt en vectors en un altre punt (transformacions actives). Els autors insisteixen en què s'ha de comprovar en cada cas si un objecte és covariant o contravariant respecte a *una* determinada transformació. A aquesta covariància «particular i activa» es contraposa la covariància «general i passiva» del formalisme de Ricci.

Aquestes diferències, així com detalls tals com no preveure la possibilitat d'una diferenciació d'índexs a partir del tercer, ens fan evident que no tractem amb formalismes completament equivalents o traduïbles. Per tant, les crítiques adreçades pels autors a suposades inconsistències del formalisme de Ricci podrien interpretar-se també en termes de les pròpies mancances d'un sistema en estat d'elaboració.

4. Conclusions

Aquest treball forma part d'un intent de comprensió dels desenvolupaments matemàtics presents en aquesta obra de Cesare Burali-Forti i Tommaso Boggio, cosa que no sembla ser la tònica general de les aproximacions historiogràfiques al tema. Aquestes han estat descriptives i han basat la crítica en les parts del text més obertament polèmiques, sense entrar a analitzar en detall les matemàtiques implicades. Analitzar els *excessius* atacs a la teoria de la relativitat en clau de la controvèrsia amb l'escola de Ricci i Levi-Civita podria contribuir a una més justa valoració de les seves contribucions. Cal recordar que el problema de la intraduibilitat entre teories científiques, més enllà del caràcter pretesament unívoc de les correspondències establertes, és expressió d'una diferent concepció del món.[3]

Agraïments

E. Sallent voldria agrair a E. A. Giannetto el valuós temps dedicat, les aclaridores discussions i la possibilitat d'accedir a una gran quantitat de material fonamental per aquesta recerca. Gràcies a X. Roqué i A. Roca, i molt especialment a L. Navarro Veguillas pel suport, la confiança i els consells que fa anys que em dedica. A J. M. Pozo per discussions fonamentals per a la comprensió dels conceptes matemàtics. Aquest treball es realitza en el marc del Projecte de Recerca BFM 2000-0604 i del Laboratori de Física Matemàtica (SCF, IEC).

Bibliografia

BOGGIO, T. (1918), «Sulla geometria assoluta degli spazi curvi», *Atti Accad. Sci. Torino*, *LIV*, 186-200.

BOGGIO, T. (1919), «Geometria assoluta degli spazi curvi», *Atti Accad. Naz. Lincei Rendic. XXVIII, s. 5*, Nota I 58-62, Nota II 166-174.

BOGGIO, T. (1926), «Sullo scostamento geodetico», *s. 6, 4*, 255-261.

3. Vegeu Gembillo, Giannetto (a cura de), en Heisenberg, 1999: 33 pel que fa la intraduïbilitat de llenguatges matemàtics en el cas de la mecànica quàntica.

BOGGIO, T. (1928a), «Omografie e differenziali relativi ad uno spazio curvo», *s. 6, 7,* 811-817.
BOGGIO, T. (1928b), «L'omografia di Riemann relativa ad uno spazio curvo», *s. 6, 8,* 19-25.
BOGGIO, T. (1928c), «Identità di Bianchi e omografia di gravitazione», *s. 6, 8,* 126-130.
BOGGIO, T. (1928d), «Spazi curvi a tre dimensioni ed omografia di Ricci», *s. 6, 8,* 183-187.
BOGGIO, T. (1929a), «L'omografia di Riemann per le ipersuperfici di uno spazio curvo», *s. 6, 9,* 278-283
BOGGIO, T. (1929b), «Le ipersuperfici di spazi a curvatura costante», *s. 6, 9,* 460-465.
BURALI-FORTI, C. (1922a), «Operatori per le iperomografie», *Atti Accad. Sci. Torino, LVII,* 285-292.
BURALI-FORTI, C. (1922b), «Sugli spazi curvi», *Atti Accad. Naz. Lincei Rendic. XXI, s. 5;* Nota I, 73-76, Nota II, 181-184.
BURALI-FORTI, C., BOGGIO, T. (1924), *Espaces Courbes. Critique de la Relativité*, Torino, Sten.
BURALI-FORTI, C.; MARCOLONGO, R. (1907a), «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Rendic. Circ. Mat. Palermo, 23,* 324-328; *24*, 65-80, 318-332.
BURALI-FORTI, C.; MARCOLONGO, R. (1907b), «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Nuovo Cim. s. 5, 13*, 488-493.
BURALI-FORTI, C.; MARCOLONGO, R. (1908a), «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Rendic. Circ. Mat. Palermo, 25*, 352-375; *26*, 369-377.
BURALI-FORTI, C.; MARCOLONGO, R. (1908b), *Notations rationelles pour le système vectoriel minimum,* Torí, V. Bona.
BURALI-FORTI, C.; MARCOLONGO, R. (1909a), *Omografie vettoriali,* Torí, Petrini.
BURALI-FORTI, C.; MARCOLONGO, R. (1909b), *Elementi di calcolo vettoriale,* Bolonya, Zanichelli.
BURALI-FORTI, C.; MARCOLONGO, R. (1911), «Notations rationelles pour le système vectoriel minimum», *Enseign. Math., XIII,* 138-148.
BURALI-FORTI, C.; MARCOLONGO, R. (1912-13), *Analyse vectorielle générale, vol. I, II,* Pavia, Mattei.
BURALI-FORTI, C.; MARCOLONGO, R. (1929), *Trasformazioni lineari,* Bologna, Zanichelli.
BURGATTI, P.; BOGGIO, T.; BURALI-FORTI, C.; (1930), *Analisi vettoriale generale e applicazioni. Vol. 2,* Bolonya, Zanichelli.
CATTANI, C. (1996), «Marcolongo e la volgarizzazione della relatività (1906-1924)», *Rivista di storia della scienza, s. II, 4 (2),* 99-144.
COUTURAT , L. (1901), *La Logique de Leibniz.* París, PUF.
GIANNETTO, E. A. (1999*a*), «Le trasformazioni di Lorentz-Poincaré-Marcolongo». Pendent de publicació a: *Atti LXXXV Congr. Naz. SIF*, Pavia.
GIANNETTO, E. A. (1999*b*), «La questione del tempo nelle trasformazioni di Lorentz-Poincaré-Marcolongo». Pendent de publicació a: *Atti Congr. Naz. di Storia della Fisica*, Como.
HEISENBERG, W. (1999), *Lo sfondo filosofico della fisica moderna,* a cura di Gembillo G., Giannetto E. A., Palerm, Sellerio.
FREGUGLIA, P. (1986), «Cesare Burali-Forti e gli studi sul calcolo geometrico», *La matematica italiana tra le due guerre mondiali,* Bolonya, Pitagora, 173-180.
LEVI-CIVITA, T.; RICCI, G. (1901), «Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications», *Math. Ann. Bot., 54,* 127-201.

MAIOCCHI, R. (1985), *Einstein in Italia. La scienza e la filosofia italiane di fronte alla teoria della Relatività,* Milà, Franco Angeli.

MAIOCCHI, R. (1986), «Matematici italiani di fronte alla relatività», *La matematica italiana tra le due guerre mondiali,* Bolonya, Pitagora, 247-264.

MARCOLONGO, R. (1906), «Sugli integrali delle equazioni dell'elettrodinamica», *Atti Accad. Naz. Lincei Rendic., s. 5, XV,* 344-349.

MARCOLONGO, R. (1912), «Sulle equazioni dell'elettrodinamica», *Rendic. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, s. 3, XVIII,* 118-135, 314-319.

MARCOLONGO, R. (1913), «Su alcune questioni relative alle trasformazioni di Lorentz in elettrodinamica», *Atti Accad. Naz. Lincei Rendic., s. 5, XXII,* 349-354, 402-408.

MARCOLONGO, R. (1914), «Les transformations de Lorentz et les équations de l'electrodynamique», *Ann. Fac. Sci. Toulouse, s. 5, IV,* 429-468.

MARCOLONGO, R. (1921), *Relatività,* Messina, Principato.

NORTON, J. D. (1993), «General covariance and the foundations of general relativity: eight decades of dispute», *Rep. Prog. Phys.*, *56*, 791-858.

PRATESI, G. (1999), *Il calcolo geometrico di Peano e il calcolo vettoriale assoluto di Burali-Forti e Marcolongo: contributi alla teoria della relatività speciale, Tesi di laurea*; relatore: E. A. Giannetto, Univ. degli Studi di Pavia.